

$(n + 1)$ -ARY DERIVATIONS OF SEMISIMPLE FILIPPOV ALGEBRAS

Ivan Kaygorodov

e-mail: kib@math.nsc.ru

Sobolev Inst. of Mathematics

Novosibirsk, Russia

Abstract:

We defined $(n+1)$ -ary derivations of n -ary algebras. We described $(n+1)$ -derivations of simple and semisimple finite-dimensional Filippov algebras over algebraically closed field zero characteristic. We constructed new examples of non-trivial $(n+1)$ -ary derivations of Filippov algebras.

Key words: $(n+1)$ -ary derivation, Filippov algebra.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов обобщения дифференцирований является δ -дифференцирование. Под δ -дифференцированием алгебры A , при δ — фиксированном элементе основного поля, мы понимаем линейное отображение $\phi : A \rightarrow A$, такое что для произвольных $x, y \in A$ верно

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

В свое время, δ -дифференцирования изучались в работах [1]–[12], где были описаны δ -дифференцирования первичных лиевых [1, 2], первичных альтернативных и мальцевских [3] алгебр, простых [6, 7] и первичных [4] лиевых супералгебр, полупростых конечномерных йордановых алгебр [5, 7] и супералгебр [5, 7, 8, 10], алгебр Филиппова малых размерностей и простых конечномерных алгебр Филиппова [12], а также простой тернарной алгебры Мальцева M_8 [12]. В частности, были построены примеры нетривиальных δ -дифференцирований для некоторых алгебр Ли [2, 4, 11], простых йордановых супералгебр [8, 10] и некоторых n -арных алгебр Филиппова [12].

В тоже время, δ -дифференцирование является частным случаем квазидифференцирования и обобщенного дифференцирования. Под обобщенным дифференцированием D мы понимаем такое линейное отображение, что существуют линейные отображения E и F , связанные с D условием, таким что для произвольных $x, y \in A$ верно

$$D(xy) = E(x)y + xF(y).$$

Если вдобавок к этому $E = F$, то D — квазидифференцирование. Тройки (D, E, F) , где D — обобщенное дифференцирование, а E, F — связанные с ним линейные отображения, называются тернарными дифференцированиями. Квазидифференцирования, обобщенные дифференцирования и тернарные дифференцирования рассматривались в работах [13]–[21]. В частности, изучались обобщенные и тернарные дифференцирования алгебр Ли [13], супералгебр Ли [14], ассоциативных алгебр [15, 16], обобщенных алгебр Кэли-Диксона [17], йордановых алгебр [20].

Понятие тернарного дифференцирования для бинарной алгебры допускает обобщение на случай n -арных алгебр. В данном случае, под $(n + 1)$ -арным дифференцированием n -арной алгебры A мы подразумеваем такой набор $(f_0, f_1, \dots, f_n) \in \text{End}(A)^{n+1}$, что для произвольных $x_1, \dots, x_n \in A$ верно

$$f_0[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, f_i(x_i), \dots, x_n].$$

Соответственно, для $(n + 1)$ -арного квазидифференцирования необходимо дополнительно требовать $f_1 = f_2 = \dots = f_n$. Ясно, что если ψ_1, \dots, ψ_n — набор элементов центроида n -арной алгебры A , то $(\sum \psi_i, \psi_1, \dots, \psi_n)$ — является $(n + 1)$ -арным дифференцированием алгебры A . В тоже время, если D — дифференцирование n -арной алгебры A , то набор (D, D, \dots, D) — $(n + 1)$ -арное дифференцирование алгебры A . Приведенные два вида $(n + 1)$ -арных дифференцирований, как и их линейные комбинации, мы будем считать тривиальными. Наибольший интерес представляет вопрос нахождения $(n + 1)$ -арных дифференцирований, отличных от тривиальных. Легко заметить следующее

Утверждение. Пусть A — (анти)коммутативная n -арная алгебра и (f_0, f_1, \dots, f_n) — $(n + 1)$ -арное дифференцирование, тогда для любой подстановки $\sigma \in S_n$ верно, что $(f_0, f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)})$ — $(n + 1)$ -арное дифференцирование.

Доказательство. Доказательство данного факта вытекает из известного утверждения о разложении произвольной подстановки в произведение транспозиций и очевидного утверждения леммы если σ — транспозиция. Утверждение доказано.

Обозначим пространство дифференцирований, δ -дифференцирований, квазидифференцирований и обобщенных дифференцирований, соответственно, через $\text{Der}(A)$, $\text{Der}_\delta(A)$, $Q\text{Der}(A)$ и $G\text{Der}(A)$. Очевидно, что мы имеем цепочку включений

$$(1) \quad \text{Der}(A) \subseteq \text{Der}_\delta(A) \subseteq Q\text{Der}(A) \subseteq G\text{Der}(A) \subseteq \text{End}(A).$$

Стоит отметить, что если n -арная алгебра A с ненулевым умножением и характеристика поля отлична от $n - 1$, то первое включение всегда строгое. В противном случае, в силу того, что тождественное отображение является элементом центроида и $\frac{1}{n}$ -дифференцированием, мы получили бы противоречие с определением умножения в алгебре A . Понятно, что в случае бинарных алгебр ограничение на характеристику поля является не существенным. Ясно, что каждая из алгебр $\text{Der}(A)$, $\text{Der}_\delta(A)$, $Q\text{Der}(A)$ и $G\text{Der}(A)$ относительно коммутаторного умножения становится алгеброй Ли. Пусть $\text{Ann}(G\text{Der}(A))$ — аннулятор алгебры Ли обобщенных дифференцирований алгебры A . Отметим, что $\text{Ann}(G\text{Der}(A))$ не тривиален. Действительно, там лежат отображения вида $\alpha \cdot \text{id}$, где α — элемент основного поля. Обозначим

$$\Delta(A) = G\text{Der}(A) / \text{Ann}(G\text{Der}(A)).$$

Также нас будет интересовать структура алгебры Ли $\Delta(A)$. $(n + 1)$ -Арные дифференцирования исследовались в работе [?], где были описаны 4-арные и обобщенные дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8 . В частности, было показано, что $\Delta(M_8) = B_3$.

Основной целью данной работы, результаты которой анонсированы в [21], является исследование обобщенных и $(n + 1)$ -арных дифференцирований простых конечномерных n -арных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В работе дано полное описание квазидифференцирований, обобщенных дифференцирований и $(n + 1)$ -арных дифференцирований данных алгебр. В итоге, с использованием результатов [12], мы имеем, что для простой конечномерной алгебры Филиппова A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль цепочка включений (1) имеет следующий вид

$$Der(A) \subset Der_\delta(A) \subset QDer(A) = GDer(A) = End(A),$$

то есть, в последних двух случаях у нас наблюдается равенство, а остальные все включения строгие. Как следствие, мы получаем описание $(n + 1)$ -арных дифференцирований полупростых конечномерных алгебр Филиппова (не являющихся простыми) над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, для которых цепочка включений (1) имеет следующий вид

$$Der(A) \subset Der_\delta(A) \subset QDer(A) = GDer(A) \subset End(A).$$

2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ.

Алгеброй Филиппова, определение которой появляется в [22], называется алгебра L с одной антикоммутативной n -арной операцией $[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Примером $(n + 1)$ -мерной n -арной алгебры Филиппова является алгебра, которую мы будем обозначать A_{n+1} . Известно, что в A_{n+1} можно выбрать базис

$$\{e\} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$$

со следующей таблицей умножения:

$$[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = (-1)^{n+i+1} e_i,$$

где через \hat{e}_i обозначается отсутствие элемента e_i в n -арном произведении. Как было отмечено в работе [23], алгебрами типа A_{n+1} исчерпываются все простые конечномерные n -арные алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Лемма 1. Пусть $A = (a_{ij})$, где $a_{ii} = 0$, — матрица линейного преобразования f_0 и $B = -A^T$ — матрица линейного преобразования f , тогда (f_0, f, \dots, f) — $(n + 1)$ -арное дифференцирование n -арной алгебры A_{n+1} .

Доказательство. Достаточно заметить, что выполнена следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} (-1)^{n+i+1} f_0[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] &= f_0(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ji} e_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+j+1} a_{ji} [e_1, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{n+1}] = \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+i+1} [e_1, \dots, \underbrace{-\sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} e_k}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] =$$

$$(-1)^{n+i+1} \sum_{j=1}^{n+1} [e_1, \dots, \underbrace{f(e_j)}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}].$$

А также, что цепочка равенств

$$[f(e_i), e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] - [f(e_i), e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] =$$

$$[f(e_i), e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] + [e_i, f(e_i), e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] + \dots + [e_i, e_i, e_{i_1}, \dots, f(e_{i_{n-2}})] =$$

$$f_0[e_i, e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}]$$

выполняется в силу того, что левое и правое выражения в цепочке равны нулю. Ясно, что если среди $\{i_k\}$ найдется индекс, совпадающий с i , то цепочка равенств не нарушается. Лемма доказана.

Далее, для произвольного вектора v через $v|_{e_i}$ мы будем обозначать коэффициент при векторе e_i в его разложении по базису $\{e\}$.

Лемма 2. Пусть $(f_0, f_1, \dots, f_n) - (n+1)$ -арное дифференцирование n -арной алгебры A_{n+1} , тогда

$$(f_0, f_1, \dots, f_n) = (g_0, g, \dots, g) + (f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*),$$

где $f_j^*(e_i)|_{e_i} = f_j^*(e_i)$ и $g_0(e_i)|_{e_i} = g(e_i)|_{e_i} = 0$.

Доказательство. Отметим, что если $i_k = i_m = i$, то

$$0 = f_0[e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_n}] = \sum [e_{i_1}, \dots, f_j(e_{i_j}), \dots, e_{i_n}] =$$

$$[e_{i_1}, \dots, f_k(e_{i_k}), \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_n}] + [e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \dots, f_m(e_{i_m}), \dots, e_{i_n}],$$

то есть,

$$[f_k(e_i) - f_m(e_i), e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \dots, \hat{e}_{i_m}, \dots, e_{i_n}] = 0.$$

Изменяя индексы k и m , а также множество $I = \{i_l\} \subset \{1, \dots, n+1\}$, где $|I| = n-1$, мы можем получить, что для произвольных k и m , а также для $j \neq i$ верно

$$(f_k(e_i) - f_m(e_i))|_{e_j} = 0.$$

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица преобразования f_0 и $B_k = (b_{ij}^k)$ — матрица преобразования f_k . По доказанному выше, мы можем считать, что $b_{ij}^k = b_{ij}$ при $i \neq j$. Тогда,

$$(-1)^{n+i+1} f_0(e_i) = f_0[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] =$$

$$\sum_j [e_1, \dots, f_j(e_j), \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = (-1)^{n+i+1} \left(\sum_{k, k \neq i} b_{kk}^k \right) e_i + \sum_{j, j \neq i} (-1)^{n+i} b_{ji} e_j,$$

то есть $a_{ij} = -b_{ji}$, при $i \neq j$. Пусть A^* матрица, составленная из элементов матрицы A с нулевыми элементами по диагонали и g_0 линейное отображение с матрицей A^* . Соответственно, B^* матрица, составленная из элементов матрицы B_k , с нулевыми элементами по диагонали и g линейное отображение с

матрицей B^* . Согласно лемме 1, $(g_0, g, \dots, g) - (n+1)$ -арное дифференцирование алгебры A_{n+1} . Таким образом, разность

$$(f_0, f_1, \dots, f_n) - (g_0, g, \dots, g) = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*)$$

будет являться $(n+1)$ -арным дифференцированием, где каждый элемент f_k^* в базисе $\{e\}$ имеет диагональную матрицу линейного преобразования, то есть, удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. В терминах леммы 2, верно

$$(f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*) = \left(\sum h_j \cdot id, h_1 \cdot id, \dots, h_n \cdot id \right) + (d_0, d, \dots, d).$$

Доказательство. Будем считать, что $f_i^*(e_j) = f_i^j e_j$. Ясно, что

$$\left(\sum f_i^{n+1} \cdot id, f_1^{n+1} \cdot id, \dots, f_n^{n+1} \cdot id \right)$$

является $(n+1)$ -арным дифференцированием, которое мы будем обозначать $(\sum h_j \cdot id, h_1 \cdot id, \dots, h_n \cdot id)$. Рассмотрим разность $(n+1)$ -арных дифференцирований $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*)$ и $(\sum h_j \cdot id, h_1 \cdot id, \dots, h_n \cdot id)$. Полученное $(n+1)$ -арное дифференцирование обозначим (d_0, d_1, \dots, d_n) , где $d_i(e_j) = d_i^j e_j$ и $d_i(e_{n+1}) = 0$. Для наглядности мы можем записать коэффициенты d_i^j в виде матрицы

$$(2) \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^{n-2} & d_1^{n-1} & d_1^n & d_1^{n+1} = 0 \\ d_2^1 & d_2^2 & & d_2^{n-2} & d_2^{n-1} & d_2^n & d_2^{n+1} = 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ d_{n-3}^1 & d_{n-3}^2 & & d_{n-3}^{n-2} & d_{n-3}^{n-1} & d_{n-3}^n & d_{n-3}^{n+1} = 0 \\ d_{n-2}^1 & d_{n-2}^2 & \dots & d_{n-2}^{n-2} & d_{n-2}^{n-1} & d_{n-2}^n & d_{n-2}^{n+1} = 0 \\ d_{n-1}^1 & d_{n-1}^2 & & d_{n-1}^{n-2} & d_{n-1}^{n-1} & d_{n-1}^n & d_{n-1}^{n+1} = 0 \\ d_n^1 & d_n^2 & & d_n^{n-2} & d_n^{n-1} & d_n^n & d_n^{n+1} = 0 \end{array} \right).$$

Отметим, что

$$0 = d_0[e_1, \dots, e_k, \dots, e_m, \dots, e_n] + d_0[e_1, \dots, e_m, \dots, e_k, \dots, e_n] = (d_k^k + d_m^m - d_m^k - d_k^m)e_{n+1},$$

то есть

$$(3) \quad d_k^k + d_m^m = d_m^k + d_k^m, \text{ где } k, m \leq n.$$

Аналогично мы можем получить

$$0 = d_0[e_2, \dots, e_k, \dots, e_m, \dots, e_{n+1}] + d_0[e_2, \dots, e_m, \dots, e_k, \dots, e_{n+1}] = (-1)^n (d_{m-1}^k + d_{k-1}^m - d_{m-1}^m - d_{k-1}^k)e_1,$$

то есть,

$$(4) \quad d_{m-1}^k + d_{k-1}^m = d_{m-1}^m + d_{k-1}^k, \text{ где } m, k \geq 2.$$

Ясно, что значения в выражениях (3-4) образуют вершины квадрата в матрице (2) с диагональю лежащей на диагонали матрицы, либо на побочной диагонали.

Осталось показать, что $d_1 = \dots = d_n$. Для этого необходимо показать, что для произвольного j верно $d_i^j = d_k^j$. Отметим, что в силу (4) мы имеем

$$d_{m-1}^m = d_n^m, m \geq 2.$$

Откуда, по (3) и $d_{n-1}^n = d_n^n$, мы получим $d_n^{n-1} = d_{n-1}^{n-1}$. Теперь заметим, что

$$d_{n-2}^{n-1} = d_{n-2}^{n-2}$$

и верно условие (4), следовательно

$$d_{n-1}^{n-1} = d_{n-1}^{n-2}.$$

Отсюда и (4), видим

$$d_{n-2}^n = d_{n-1}^n = d_n^n.$$

Последнее, с учетом (3), влечет

$$d_{n-2}^{n-2} = d_n^{n-2}.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, мы получим, что для произвольного j верно $d_i^j = d_k^j$, то есть требуемое. Лемма доказана.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Теперь заметим, что если $(f_0, f, \dots, f) - (n+1)$ -арное дифференцирование n -арной алгебры A_{n+1} , где каждое из отображений f_0 и f на базисных элементах действует как $f_0(e_i) = f_0^i e_i, f(e_i) = f_i e_i$, то

$$f_0^i e_i = (-1)^{n+1+i} f_0[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j - f_i \right) e_i.$$

Откуда получаем, что

$$f_0^i = \sum_j f_j - f_i,$$

и, следовательно,

$$\sum_j f_0^j = n \sum_j f_j.$$

Полученные результаты, дают

$$(5) \quad f_i = \frac{1}{n} \sum_j f_0^j - f_0^i.$$

То есть, отображение f однозначно определяется из вида отображения f_0 и произвольное отображение f_0 , такое что $f_0(e_i) = f_0^i e_i$ задает $(n+1)$ -арное дифференцирование (f_0, f, \dots, f) , где f_0 и f связаны посредством соотношения (5). Таким образом, исходя из полученного и леммы 1, мы имеем

Теорема 4. Пусть A — простая конечномерная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, тогда $\Delta(A) = sl_{n+1}$.

Полученные результаты мы можем подытожить в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть $(f_0, f_1, \dots, f_n) - (n+1)$ -арное дифференцирование простой конечномерной n -арной алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, тогда

$$(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left(\sum_{j=1}^n h_j \cdot id, h_1 \cdot id, \dots, h_n \cdot id \right) + (d_0, d, \dots, d)$$

и $[d_0]^T + [d] = 0$, где $[d_0], [d]$ — матрицы линейных отображений d_0, d .

Отметим, что из теоремы 5 легко получается описание δ -дифференцирований простых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, которые согласуются с результатами [12].

Теорема 6. Пусть (f_0, f_1, \dots, f_n) — $(n+1)$ -арное дифференцирование полупростой конечномерной n -арной алгебры Филиппова A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, тогда $A = \bigoplus_{i=1}^t I_i$, где I_i — простой идеал алгебры A и

1) $f_j(I_i) \subseteq I_i$;

2) матрицы линейных отображений f_j в подходящем базисе имеют блочно-диагональный вид, где каждый квадратный блок имеет размерность $n+1$ и строится исходя из описания соответствующего $(n+1)$ -арного дифференцирования простой алгебры Филиппова I_i посредством теоремы 5, то есть в подходящем базисе

$$(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left(\sum_{j=1}^n h_j, h_1, \dots, h_n \right) + (d_0, d, \dots, d),$$

где

$$[h_i] = \begin{pmatrix} h_i^1 E_{n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_i^t E_{n+1} \end{pmatrix} \text{ и } [d_0]^T + [d] = 0.$$

Здесь под E_{n+1} подразумевается единичная матрица размера $n+1$, а через $[P]$ обозначена матрица линейного преобразования P .

Доказательство. Согласно результатам [23], $A = \bigoplus_{i=1}^t I_i$, где I_i — простой идеал алгебры A и $I_i \cong A_{n+1}$.

Пусть $A = I \oplus J$, где J — простой идеал, а I — прямая сумма некоторого количества идеалов изоморфных J . Тогда для элементов $i_k \in I$ верно

$$f_0[i_1, \dots, i_n] = \sum [i_1, \dots, f_k(i_k), \dots, i_n] \in I.$$

Учитывая классификацию простых конечномерных алгебр Филиппова [23] и структуру алгебры A_{n+1} , мы можем заключить, что $f_0(I) \subseteq I$. Допустим, что для некоторого t верно $f_t(I)|_J \neq 0$. Тогда

$$0 = f_0[J, \dots, J, I, J, \dots, J] = [J, \dots, J, f_t(I), J, \dots, J],$$

то есть, $f_t(I)|_J$ идеал в J . Откуда следует, что либо $f_t(I) \subseteq I$, либо $f_t(I)|_J = J$. В силу того, что алгебра J является простой и, следовательно, не является нильпотентной, то второй случай не возможен. Таким образом, мы показали, что выполнено условие 1.

Для доказательства второго условия теоремы выберем базис алгебры A как объединение базисов I_i . Нам достаточно рассмотреть ограничение отображений f_t на I_i и воспользоваться теоремой 5. Теорема доказана.

Из теорем 4 и 6 легко получается

Теорема 7. Пусть A — полупростая конечномерная n -арная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, тогда $\Delta(A) = \bigoplus sl_{n+1}$.

Учитывая результаты теорем 5 и 7, а также [13], мы можем сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. Если n -арная алгебра Филиппова обладает свойством $GDer(A) = End(A)$, то либо ее размерность не выше чем n , либо она простая $(n + 1)$ -мерная алгебра A_{n+1} .

В заключение, автор выражает благодарность проф. В. Н. Желябину, проф. А. П. Пожидаеву и проф. П. С. Колесникову за внимание к работе и конструктивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. Т., *О δ -дифференцированиях алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **39** (1998), №6, 1409–1422.
- [2] Филиппов В. Т., *О δ -дифференцированиях первичных алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **40** (1999), №1, 201–213.
- [3] Филиппов В. Т., *О δ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр*, Алгебра и Логика, **39** (2000), №5, 618–625.
- [4] Zusmanovich P., *On δ -derivations of Lie algebras and superalgebras*, J. of Algebra **324** (2010), №12, 3470–3486. [<http://arxiv.org/abs/0907.2034>]
- [5] Кайгородов И. Б., *О δ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр*, Алгебра и логика **46** (2007), №5, 585–605. [<http://arxiv.org/abs/1010.2419>]
- [6] Кайгородов И. Б., *О δ -дифференцированиях классических супералгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **50** (2009), №3, 547–565. [<http://arxiv.org/abs/1010.2807>]
- [7] *О δ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр*, Алгебра и логика **49** (2010), №2, 195–215. [<http://arxiv.org/abs/1010.2423>]
- [8] Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., *О δ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки*, Алгебра и анализ, **23** (2011), №4, 40–58. [<http://arxiv.org/abs/1106.2884>]
- [9] Кайгородов И. Б., *Об обобщенном дубле Кантора*, Вестник Самарского гос. университета **78** (2010), №4, 42–50. [<http://arxiv.org/abs/1101.5212>]
- [10] Кайгородов И. Б., *О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр*, Мат. заметки, 2012, принято к печати, [<http://arxiv.org/abs/1106.2680>]
- [11] Кайгородов И. Б., *Об обобщенных δ -дифференцированиях*, Сиб. матем. ж., сдано в печать. [<http://arxiv.org/abs/1107.4420>]
- [12] Кайгородов И. Б., *О δ -дифференцированиях n -арных алгебр*, Известия РАН. Серия математическая, сдано в печать. [<http://arxiv.org/abs/1107.442>]
- [13] Leger G., Luks E., *Generalized derivations of Lie Algebras*, J. of Algebra, **228** (2000), 165–203.
- [14] Zhang R., Zhang Y., *Generalized derivations of Lie superalgebras*, Comm. Algebra, **38** (2010), №10, 3737–3751.
- [15] Komatsu H., Nakajima A., *Generalized derivations of associative algebras*, Quaest. Math., **26** (2003), №2, 213–235.
- [16] Komatsu H., Nakajima A., *Generalized derivations with invertible values*, Comm. Algebra, **32** (2004), №5, 1937–1944.
- [17] Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M., *Ternary derivations of generalized Cayley-Dickson algebras*, Comm. Algebra, **31** (2003), №10, 5071–5094.
- [18] Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M., *Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras*, Linear Algebra Appl., **428** (2008), №8-9, 2192–2219.
- [19] Perez-Izquierdo J. M., *Unital algebras, ternary derivations, and local triality*, Algebras, representations and applications, 205–220, Contemp. Math., 483, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [20] Шестаков А. И., *Тернарные дифференцирования сепарабельных конечномерных йордановых алгебр*, Сиб. мат. ж., сдано в печать.
- [21] Кайгородов И. Б., *$(n + 1)$ -Арные дифференцирования простых n -арных алгебр*, Алгебра и Логика, **50** (2011), №5, 690–691.

- [22] Филиппов В. Т., *n*-Лиевы алгебры, Сиб. мат. ж., **26** (1985), №6, 126–140.
- [23] Ling W., *On structure of n-Lie algebras*, Thesis, Siegen University-GHS-Siegen (1993), 1–61.